DISSERTATIONS-AUSZUG

Über die Schwebungen bei zwei schwach gekoppelten nichtlinearen Systemen

Auszug aus der Inaugural-Dissertation desselben Titels
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen

vorgelegt von

Elmar Sauter
geboren am 12. Januar 1932 in Memmingen

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juni 1960

Dekan: Prof. Dr. Wolf Freiherr v. Engelhardt
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Werner Braunbek
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Gert Molière

RIJKS UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Ein Exemplar der vollständigen Dissertation in Maschinenschrift und ein Kleinfilmnegativ und -positiv (Format 24×36 mm) befinden sich in der Universitätsbibliothek in Tübingen. Der Positivfilm kann in der Universitätsbibliothek benutzt werden. Auf Wunsch gibt die Universitätsbibliothek Positivkopien zu dem jeweils gültigen Kostensatz ab.

6663

I. Die Differentialgleichungen (DGln).

Vorgelegt ist das DGls-System

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2r_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + n_1 x_1^3 &= \rho_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2r_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + n_2 x_2^3 &= \rho_2 x_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Es beschreibt zwei gedämpfte Schwingsysteme mit nichtlinearen Federkräften. Die Kopplung ist eine reine Kraftkopplung.

Ausgangspunkt für die benutzte Näherung ist die Lösung des linearen, ungedämpften Problems, die in der Form von — nach Amplitude und Phase — modulierten Schwingungen, von Schwebungen, geschrieben werden kann [1]:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1(t) \cdot \cos[\bar{\omega} t + \varphi_1(t)] \\ x_2 &= A_2(t) \cdot \cos[\bar{\omega} t + \varphi_2(t)] \end{aligned} \tag{2}$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 &= a(t) \cdot \cos \bar{\omega} t + b(t) \cdot \sin \bar{\omega} t \\ x_2 &= c(t) \cdot \cos \bar{\omega} t + d(t) \cdot \sin \bar{\omega} t \ . \end{aligned} \tag{3}$$

$\bar{\omega}$, die Frequenz der Grundschwingung, ist eine überzählig eingeführte Konstante, die hier noch eine unendliche Vieldeutigkeit der Darstellung bewirkt.

Weichen die DGln (1) in ihrer Form nicht allzusehr von denen ab, die ein lineares, ungedämpftes System beschreiben (d. h. $|r_i| \bar{\omega} \ll 1$ und $|n_i| \cdot A_i^2/\bar{\omega}^2 \ll 1$), so kann man (2) nach Kryloff und Bogoljuboff [2]), (3) nach van der Pol [3]) als Ansatz für eine Näherungslösung des DGls-System (1) mit zunächst noch unbekannten Funktionen $A_1(t), \ldots, d(t)$ zugrunde legen.

Eine Darstellung der Lösung als Schwebung mit — gegenüber der Grundschwingung — langsam (!) veränderlichen Zeitfunktionen $A_1(t), \ldots, d(t)$ (also $\dot{f} \ll \omega f$ und $\ddot{f} \ll \omega \dot{f}$) erfordert schon im linearen, ungedämpften Fall nahe benachbarte Eigenfrequenzen ω_I und ω_{II}, d. h. aber kleine Kopplungskonstanten ρ_1, ρ_2 und eine kleine Differenz $|\omega_2 - \omega_1|$ ($\rho_i/\bar{\omega}^2 \ll 1$ und $|\omega_2 - \omega_1|/\bar{\omega} \ll 1$). Dasselbe hat man natürlich auch im nichtlinearen, gedämpften Fall zu fordern.

Im folgenden wird der Ansatz von Kryloff und Bogoljuboff benützt. Auf erzwungene Schwingungen eines Systems mit nur einem Freiheitsgrad wurde diese Methode schon in [4]) und [5]) angewandt. Hier nun wird auf zwei Freiheitsgrade verallgemeinert.

Einsetzen von (2) in das DGls-System (1) liefert, wenn man — im Sinne der Näherung für schwache Nichtlinearität — nur die Grundschwingung $\bar{\omega}$ berücksichtigt und die Phasendifferenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ einführt, die drei näherungsweise gültigen DGln erster Ordnung für A_1, A_2 und φ:

$$\dot{A}_1 = -\frac{\rho_1}{2\omega} A_2 \sin\varphi - r_1 A_1$$

$$\dot{A}_2 = +\frac{\rho_2}{2\omega} A_1 \sin\varphi - r_2 A_2 \qquad (4)$$

$$\dot{\varphi} = \left(\rho_2 \frac{A_1}{A_2} - \rho_1 \frac{A_2}{A_1}\right) \frac{\cos\varphi}{2\omega} - \Omega + \frac{1}{2\omega}(N_1 A_1^2 - N_2 A_2^2).$$

Bei der Herleitung dieser DGln tritt zunächst die unbestimmte Grundfrequenz ω auf. Die Forderung, daß A_1, A_2 und φ langsam veränderlich sein sollen, erzwingt jetzt für ω einen den Frequenzen ω_1 und ω_2, die ja selbst eng benachbart sind, genügend benachbarten Wert ω ($|\omega - \omega_1|/\omega \ll 1$), der nicht genauer bestimmt zu werden braucht. Weiter wurde gesetzt $N_i = 3n_i/4$, $\Omega = \omega_2 - \omega_1$.

Mit den Abkürzungen: $u_1 = \sqrt{\rho_2} \cdot A_1$, $u_2 = \sqrt{\rho_1} \cdot A_2$,
$\gamma = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}/2\omega$, $\eta = 2\omega\Omega/\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$, $\nu_1 = N_1/\rho_2 \cdot \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$
$\nu_2 = N_2/\rho_1 \cdot \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$ gelingt es, die acht Systemkonstanten auf sechs zu reduzieren und das DGls-System symmetrischer zu schreiben:

$$\dot{u}_1 = -\gamma u_2 \sin\varphi - r_1 u_1$$
$$\dot{u}_2 = +\gamma u_1 \sin\varphi - r_2 u_2 \qquad (5)$$
$$\dot{\varphi} = \gamma\left[\left(\frac{u_1}{u_2} - \frac{u_2}{u_1}\right)\cos\varphi - \eta + (\nu_1 u_1^2 - \nu_2 u_2^2)\right].$$

II. Integration der DGln.

Der Fall stationärer Schwingungen ist durch Nullsetzen der zeitlichen Ableitungen in (5) sofort gelöst. Bei den ungedämpften Schwingungen ergibt sich $\dot{\varphi}=0$ oder π und eine Beziehung zwischen den Amplituden und den Systemkonstanten. Bei den linearen gedämpften Schwingungen bekommt man nur das Verhältnis der Amplituden und φ, nicht aber die Amplituden einzeln, dafür aber zusätzlich eine Stationaritätsbedingung

$$\Omega = f(r_1, r_2, \omega, \rho_1, \rho_2) \qquad (6)$$

für die Systemkonstanten. Bei den nichtlinearen gedämpften Schwingungen lassen sich dagegen A_1 und A_2 einzeln in den Systemkonstanten ausdrücken, und jene Stationaritätsbedingung fällt weg, — abgesehen vom Fall $N_1\rho_1 r_2 + N_2\rho_2 r_1 = 0$, der dasselbe Verhalten liefert wie der lineare, gedämpfte Fall.

Vollständig lösen läßt sich bei nichtstationärer Bewegung der Fall ungedämpfter Schwingungen. Führt man als neue Größen

$\bar{A}_i = u_i/\sqrt{E_1}$, $\bar{N} = E_1(\nu_1 + \nu_2)/2$, $\bar{\Omega} = \eta + \nu_2 \cdot E_1$, $\bar{E} = 2E_2/E_1 + \nu_2 E_1/2$
ein, so lauten die beiden ersten Integrale:

$$\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 = 1 \tag{7}$$

$$2\,\bar{A}_1 \cdot \sqrt{1-\bar{A}_1^2} \cdot \cos\varphi = N \cdot \bar{A}_1^4 - \Omega \cdot \bar{A}_1^2 + E \tag{8}$$

(E_1 und E_2' sind die beiden ersten Integrationskonstanten). Die dritte Integration ergibt t als elliptisches Integral in der Variablen $w = \bar{A}_1^2$. Dieses Integral wird für die Anfangsbedingung $\bar{A}_1\ (t=0) = 0$ gelöst. Man erhält dann $\bar{A}_1^2$ als elliptische Funktion der Zeit, wobei im wesentlichen drei Fälle zu unterscheiden sind, je nachdem ob im Radikanden des elliptischen Integrals alle vier Nullstellen reell und verschieden, oder alle Nullstellen reell, aber nicht alle verschieden sind oder ob ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen auftritt. Anschließend werden die gefundenen Ausdrücke auf den vollsymmetrischen Spezialfall angewandt, der gekennzeichnet ist durch

$$n_1 = n_2 = n = 4N/3,\ \rho_1 = \rho_2 = \rho,\ \omega_1 = \omega_2, \text{ also } \Omega = 0\ .$$

Im Fall gedämpfter Schwingungen ist allgemein keine Integration des DGls-Systems (5) mehr möglich: Daher werden zwei Sonderfälle betrachtet.

Im ersten Fall wird $r_1 = r_2$ gesetzt. Eine einzige Integration läßt sich durchführen, und man erhält

$$u_1^2 + u_2^2 = E_r \cdot \exp(-2r_1 t). \tag{9}$$

Im zweiten Fall wird $r_1 = -r_2 = r$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\gamma_i = 0$ gesetzt. Hier findet man zwei Integrale:

$$E_{2r}' = u_1 u_2 \cdot \cos\varphi + u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot \nu/2 \tag{10}$$

$$u_1^2 u_2^2 = \frac{2}{\nu^2}\left\{(1 + \nu E_{2r}') - \sqrt{1 + 2\nu E_{2r}'} \cdot \tau \cdot \sin\left[\frac{\gamma \cdot |\nu|}{2r}(u_1^2 + u_2^2 - E_{1r}')\right]\right\} \tag{11}$$

mit den Integrationskonstanten E_{1r}' und E_{2r}' und mit $\tau = \operatorname{sign} \sin\varphi\ (t = t_0)$ — vorausgesetzt, daß $E_{2r} = 1 + 2\nu E_{2r}' > 0$ ist. Für $E_{2r} = 0$ läßt sich die Integration vollständig durchführen. Es ergibt sich $\varphi(t) = 0$ oder π, $u_1(t) = C_1 \exp(-rt)$, $u_2(t) = C_2 \exp(rt)$ mit $C_1 C_2 = \mp\, 1/\nu$ und dem oberen (unteren) Vorzeichen für $\varphi = 0\ (\pi)$.

III. Diskussion der Ergebnisse.

Stationäre Bewegung

Die Verhältnisse im ungedämpften, linearen Fall sind bekannt[1]: Es ist $\varphi = 0$ oder π, und die Amplitudenbeziehung ergibt im A_1, A_2, Ω-Koordinatensystem für jeden der beiden φ-Werte zwei Schraubenflächen-ähnliche Gebilde, die sich aber im ganzen Intervall $-\infty < \Omega < +\infty$ nur um 90° drehen. Für $\Omega = \text{const}$ erhält man also zu jedem φ zwei Geraden $1_{1,2}$.

Der ungedämpfte, nichtlineare Fall ist schon viel verwickelter. Man findet wieder zu jedem der beiden φ-Werte 0 und π im A_1, A_2-Diagramm zwei Am-

plitudenkurven $A_2 = A_2(A_1)$, die durch den Ursprung laufen, für $N_1/N_2 > 0$ tritt noch ein dritter Kurvenast auf, der nicht durch den Ursqrung geht. Jene Geraden $1_{1,2}$ werden nun zu Tangenten an die Amplitudenkurven im Nullpunkt. Für immer größer werdende Entfernungen vom Ursprung streben im Falle $N_1/N_2 < 0$ die beiden Amplitudenkurven asymptotisch gegen die Koordinatenachsen, im Falle $N_1/N_2 > 0$ nur eine der beiden; die andere Kurve strebt asymptotisch gegen eine der beiden Nichtlinearitätsgeraden $A_2 = \pm \sqrt{N_1/N_2} \cdot A_1$, während der dritte Kurvenast dann hyperbelähnlich zwischen einer Koordinatenachse und einer Nichtlinearitätsgeraden verläuft. Übersichtliche Verhältnisse bekommt man erst im vollsymmetrischen Spezialfall: Für $\varphi = 0$ erhält man als Amplitudenkurven die Winkelhalbierenden im A_1, A_2-Diagramm und als dritten Kurvenast die Hyperbel $A_1 A_2 = -\rho/N$.

Bei gedämpften Schwingungen gibt es stationäre Bewegung nur dann, wenn die Dämpfungskonstanten r_1 und r_2 verschiedene Vorzeichen besitzen. Stellt man die Verhältnisse wieder in einem A_1, A_2, Ω-Koordinatensystem dar, so entspricht der stationären Bewegung im linearen Fall die Schnittgerade der Ebene $A_2 = \sqrt{-r_1 \rho_2 / r_2 \rho_1} \cdot A_1$ mit der Ebene $\Omega = \text{const}$ (nach (6)). Im nichtlinearen Fall dagegen entsprechen der stationären Bewegung Kurven auf jener ersten Ebene, deren Projektionen auf die A_1, Ω- und auf die A_2, Ω-Ebene Parabeln darstellen. Für verschwindende Nichtlinearität werden die Parabeln immer flacher, bis sie sich zu den Geraden des linearen Falls gestreckt haben.

Nichtstationäre Bewegung

Zunächst werden die ungedämpften Schwingungen betrachtet. Den Zusammenhang zwischen den Amplituden $A_1(t)$ und $A_2(t)$ gibt Gl. (7), die im A_1, A_2-Diagramm bei fester Integrationskonstanten E_1, d.h. für vorgegebene Anfangsbedingungen, eine Mittelpunktsellipse darstellt. Die Diskussion der Zeigerdiagramme, die den Zusammenhang zwischen der Amplitude $A_1(t)$ und der Phase $\varphi(t)$ geben, geschieht an Hand von Gl. (8). Für verschiedene N- und Ω-Werte sind verschiedene Diagramme gezeichnet, E ist jeweils Scharparameter im einzelnen Diagramm. Die Diagramme ähneln im wesentlichen den Diagrammen, die man für die erzwungenen Schwingungen eines einfachen, nichtlinearen Systems mit nur einem Freiheitsgrad erhält [5]). Es ergeben sich wie dort nierenförmige Kurven, Kurven, die eine Schleife bilden, und Kurven, die aus zwei geschlossenen Kurventeilen bestehen, jeweils für entsprechende Werte der Parameter N, Ω, E. Die Nullkurve (geht durch den Ursprung) und die Einskurve (geht durch die Punkte $A_1 = 1$, $\varphi = \pm \pi/2$) fallen nur im vollsymmetrischen Spezialfall zusammen. Der stationären Bewegung entsprechen die singulären Punkte, von denen in jedem Diagramm zwei bis vier auftreten. Treten mehr als zwei auf, so ist genau einer der singulären Punkte ein Doppelpunkt.

Amplitude und Phase sind im allgemeinen periodische Zeitfunktionen mit derselben Periode T. Die Periode T wird unendlich, wenn der Radikant des

elliptischen Integrals eine doppelte Nullstelle besitzt und in deren Umgebung positiv ist. Aber nur im Falle $\bar{N} = \bar{\Omega}$ (hierunter fällt der vollsymmetrische Spezialfall) und im Falle $\bar{E} = 0$ (hierunter fällt die spezielle Anfangsbedingung $\bar{A}_1 (t = 0) = 0$) lassen sich die Bedingungen für asymptotische Bewegungsform einfach angeben.

Auch die Kurvenformen von Amplituden und Phase als Funktionen der Zeit für die Anfangsbedingung $\bar{A}_1 (t = 0) = 0$ ähneln denen, die man im Fall erzwunger Schwingungen mit nur einem Freiheitsgrad erhält [6]). Man findet Kurven, in denen die Amplitude den Maximalwert 1 annimmt, und solche, die stets kleiner als 1 bleiben, Kurven mit Höcker und die Kurve mit asymptotischer Bewegungsform.

Bei den gedämpften Schwingungen ist, wie schon erwähnt wurde, keine allgemeine Integration möglich. Es werden daher drei Spezialfälle untersucht.

Im ersten Spezialfall gleicher Dämpfungskonstanten gilt Gl. (9): u_1 und u_2, also auch $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_2$ streben — bei positiver Dämpfung — gegen Null, aber nicht unbedingt monoton.

Als zweiter Spezialfall wird der Fall mit $r_1 = -r_2 = r$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\eta_1 = 0$, $E_{2r} > 0$ betrachtet (vollsymmetrischer Spezialfall mit entgegengesetzt gleichen Dämpfungskonstanten): Gln. (10) und (11). Man beachte, daß Gl. (10) von r unabhängig ist und daher auch ein Integral des dämpfungsfreien Falls ist (eine Linearkombination der dortigen Integrale). Es werden nun noch einmal neue Bezeichnungen eingeführt:

$$v_i = u_i \cdot \sqrt{|\nu|}\,, \quad \omega_0 = \gamma/2r, \quad E_{1r} = -\gamma \cdot |\nu| \cdot E'_{1r}/2r.$$

Die Diskussion des $\nu_1\nu_2,\varphi$— Zeigerdiagramms zeigt, daß man im wesentlichen drei Fälle zu unterscheiden hat, je nachdem $E_{2r} > 1$, $= 1$ oder $0 < E_{2r} < 1$ ist. Da hierbei Gl. (10) (mit den neuen Variablen) benützt wurde, gilt diese Diskussion sogar auch für ungedämpfte Schwingungen. Die allgemeine Diskussion von (10) und (11) — in den neuen Bezeichnungen — ist ziemlich unbequem, daher wird ausführlich nur der Sonderfall einfacher Anfangsbedingungen, nämlich $v_1 (t = 0) = 0$ und $\varphi (t = 0) = -\pi/2$ (dies bedeutet $E_{2r} = 1$) diskutiert.

Die ν, φ-Zeigerdiagramme erhält man einfach aus den Nullkurven der ungedämpften Schwingungen dadurch, daß man — für $r > 0$, $\nu < 0$ — die ($\varphi = 0$)-Achse mit dem Doppelpunkt darauf in den vierten Quadranten um den Winkel φ_S hineindreht ($\sin \varphi_S = -r/\gamma$). Schwieriger ist schon der Zusammenhang zwischen den Amplituden v_1 und v_2. Man bekommt hier ein verwickeltes Kurvenbild, aus dem man aber im Grenzfall r gegen Null doch wieder die Bahnen auf den Mittelpunktsellipsen des ungedämpften Falls erhält.

Der dritte behandelte Spezialfall ist: $r_1 = -r_2 = r$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (also $N_1 \cdot \rho_1 = N_2 \cdot \rho_2$), $\eta_1 = 0$, $E_{2r} = 0$. Hier läßt sich die Integration vollständig durchführen. Setzt man oBdA $\varphi_2 (t) = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\rho_2}{N_1} \cdot \frac{1}{c_2} \cdot \exp(-rt) \cdot \cos \omega t \\ x_2 &= \quad + c_2 \cdot \exp(+rt) \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \tag{12}$$

Man hat also zwei gleich-periodische Schwingungen, die eine mit negativer, die andere mit positiver Dämpfung. Für $N_i > 0$ (< 0) schwingen stets beide Schwinger in entgegengesetzter (gleicher) Richtung. Eine stationäre Schwingung kann sich nicht einstellen. Eine Beschreibung der Bewegung durch das DGls-System (12) gilt natürlich nur im Rahmen unserer Näherung, also nur, solange die Ausschläge des zweiten Schwingers noch nicht allzusehr angewachsen sind.

IV. Vergleich mit der erzwungenen nichtlinearen gedämpften Schwingung von nur einem Freiheitsgrad.

Der Übergang vom DGls-System (1) zu einem einzigen Freiheitsgrad erfordert das Verschwinden von (z. B.) r_2, n_2, ρ_2. Hiermit kann man ohne weiteres von den vorliegenden Ergebnissen auf die Gleichungen von [4]) und [5]) spezialisieren.

V. Numerische Rechnung.

Durch Vergleich mit einer numerischen Lösung des DGls-Systems (1) nach der Methode von Runge-Kutta wird die Güte des Näherungsverfahrens nach Kryloff und Bogoljuboff untersucht, und zwar für den ungedämpften, vollsymmetrischen Spezialfall. Für die numerische Rechnung wurde der Digitalrechner Siemens 2002 des Rechenzentrums am Mathematischen Institut der Universität Tübingen benützt. Die Gesamtrechenzeit betrug rund 150 Stunden.

Die Schrittlängenbestimmung ergab für $\omega = 1$ die Brauchbarkeit einer Schrittlänge von 0,1 bis zu Abszissenwerten $t = 30\,000$, was also schon 300 000 Runge-Kutta-Schritte bedeutete. Als Anfangsbedingungen wurden benützt:

$$x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0$$
$$x_2(0) = 1,\ \dot{x}_2(0) = 0.$$

Als Parameterwerte wurden gewählt: $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $\rho = 0{,}001$ und 18 verschiedene n-Werte von 0,00 266.. bis 0,00 666.. ($\bar{N}$ von 2 bis 5). Berechnet wurde jeweils die Amplitudenfunktion $A_1(t)$, indem immer die Maximalwerte der Kurve $x_1(t)$ vom Rechner ausgedruckt wurden. In Figuren und Tabellen wurden die Ergebnisse dargestellt: Man findet eine sehr gute Übereinstimmung im gesamten Verlauf der Kurven $A_1(t)$, die man nach beiden Näherungsverfahren erhält. Auch die Perioden T und die Maxima A_{1M} der Amplitudenfunktion $A_1(t)$ in Abhängigkeit von der Nichtlinearität n gleichen sich sehr nach beiden Methoden. Eine kleine Abweichung zeigt sich in einer geringen Verschiebung des aperiodischen Grenzfalles, der nach Kryloff und Bogoljuboff bei $n = 0{,}00\,533\,3..$ ($\bar{N} = 4$) liegt, während er nach Runge-Kutta zwischen $n = 0{,}00\,533\,0$ ($\bar{N} = 3{,}9975$) und $n = 0{,}00\,533\,2$ ($\bar{N} = 3{,}9990$) liegt.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Dr. W. Braunbek herzlich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für die wertvollen Ratschläge, die ich im Laufe der Entstehung dieser Arbeit von ihm erfahren durfte. Weiter bin ich noch Herrn Professor Dr. K. Zeller und Herrn Diplommathematiker J. Knittel vom Rechenzentrum des Mathematischen Instituts der Universität Tübingen für ihre Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnungen zu Dank verpflichtet.

Literatur

1) Auch, K. und W. Braunbek: Annalen der Physik, 6. Folge, Bd. 15, S. 255, (1955)

2) Kryloff, N. und N. Bogoljuboff: Introduction to non-linear mechanics, S. 8 ff., Übersetzung aus dem Russischen von S. Lefschetz in: Annals of Mathematics Studies Nr. 11, Princeton University, Princeton, 1947

3) van der Pol, B.: Phil. Mag., 7. Serie, Bd. III, S. 65 (1927)

4) Braunbek, W.: ZS f. Physik, Bd. 147, S. 297, (1957)

5) Braunbek, W. und E. Sauter: ZS f. Physik, Bd. 147, S. 507 (1957)

Buchdruckerei Bölzle Tübingen